הפקולטה להנדסה ע"ש איבי ואלדר פליישמן
המחלקה להנדסת תעשיה

אוניברסיטת תל אביב
המחלקה להנדסת תעשייה

סמסטר ב' - מועד א'
תאריך הבחינה: 4.2.18

סימולציה (0571311001) מועד א'

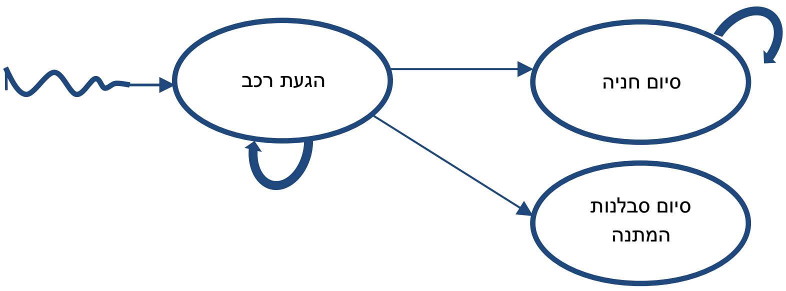
מרצה: ד"ר דן ימין, מתרגלים: מר יוגב מטלון ומר אופיר מגדסי
חומר עזר: מחשבון כיס סטנדרטי **ודפים כתובים ללא הגבלה**
משך הבחינה: שלוש שעות
ענו על כל השאלות. **יש להרבות בהסברים.**

הערה: המבחן מנוסח בלשון נקבה, אך מופנה לגברים ולנשים כאחד!

שאלה 1 (30 נק')
בחניון למוסד אקדמאי במרכז הארץ שבו כניסה בודדת, יש מקום ל-100 מכוניות בלבד. בכל שעה עגולה מתקיימת הרצאה. זמן הגעת המכוניות לחניון הינו בלתי תלוי, אך קצב הגעת המכוניות משתנה בזמן. בשעות 8:00-10:00, קצב ההגעה הינו 20 לשעה. לאחר מכן, פוחת קצב ההגעה בהדרגה, כך שבכל שעה <u>הקצב קטן</u> ב- 2 מכוניות בשעה. 5% מהרכבים שייכים למרצים ו95% לסטודנטים. אם החניון איננו מלא, מכונית אשר הגיעה לשער החניון תיכנס באופן מידי. עבור סטודנטים, אם החניון מלא הם יהיו מוכנים להמתין זמן המתפלג משולשית עם הפרמטרים (5,8,20) בדקות. בנוסף, אם **בזמן הגעתם** יש פחות מ-20 דקות לפני שתחלוף שעה עגולה, הם יינטשו בהסתברות של 0.5. כמו-כן, במידה והסטודנט מגיע ורואה לפחות 5 מכוניות בתור הוא ינטוש את התור. למרצים המגיעים לחניון יש קדימות. זמן ההמתנה שלהם הוא לכל היותר 5 דקות, אחרת יינטשו את התור. סטודנטים ומרצים שנטשו את החניון בגלל מצוקת חנייה יבחרו לא להגיע למוסד האקדמאי באותו היום. החניון נפתח לכניסת מכוניות בשעה 08:00 ונסגר לכניסת מכוניות בשעה 17:00. זמן השהיה של מכונית בחניון מתפלג אחיד בין 2 ל- 7 שעות. הנהלת המרכז האקדמאי מתמחרת היעדרות מרצה בכ5000 ₪ והיעדרות סטודנט בכ100 ₪.

א. תכנני מודל סימולציה מבוסס תכנות אירועים לצורך הערכת ההפסד הכספי היומי של המוסד האקדמאי הנובע ממצוקת החנייה. תחילה, יש להגדיר את מצבי המערכת והאירועים שמשפיעים עליהם כתרשים עיגולים (6 נק') וכן את המדד/ים לצורך בחינת מטרת הנהלת המרכז האקדמאי (2 נק'). לאחר מכן, יש להציג את כלל הפרוצדורות הנדרשות לתכנות המודל כתרשים זרימה (17 נק').

דיאגרמת מצבים:



לכל מצב יש פונקציית יצירה וביצוע. פונקציות היצירה מקבלות כפרמטר את זהות הרכב – מרצה או סטודנט. אין צורך לפצל לאירועים שונים לסטודנט ולמרצה, אך פתרונות כאלו התקבלו כל עוד הם עקביים עם הפרוצדורות <u>ועם חלוקת הביקוש ממופע הלקוחות הכללי</u>.

לגבי הביקוש השעתי –ניתן לבצע עיבוד מקדים, להגדיר מערך $d(t)$ המוגדר ביחידות של שעה ולהשתמש ב-$\lfloor T_{now} \rfloor$ כפרמטר (בדומה למה שביצעתם בפרויקט).

כמו-כן, יש להחזיק שני תורים נפרדים – למרצים ולסטודנטים, שכן מרצה שמגיע מתקדם לראש התור. אם מרצה נוסף מגיע, הוא מחכה בתור המרצים.

<u>הגעת רכב</u>: ראשית, כדאי לבדוק האם מדובר במרצה או סטודנט (אם כי ניתן לעשות זאת רק במידה ויש תור). לאחר מכן נבדוק האם קיים תור (סטודנטים/מרצים בהתאם). אם קיים תור והרכב הינו של סטודנט, נבדוק את תנאי הנטישה. באופן דומה, נבצע את הבדיקה עבור המרצה בהתאם. נוסיף לתור. במקרה נטישה אפשרית – נקרא לפרוצדורת יצירת סיום סבלנות, לפי ההתפלגויות הנתונות בשאלה. במקרה של נטישה מיידית, נעדכן את מספר הנוטשים מהסוג הרלוונטי.
אם אין תור, והחניון אינו מלא ניצור סיום חניה. אם החניון מלא ניצור סיום סבלנות.
בכל מקרה שהוא, יש צורך ביצירת מופע הגעת רכב נוסף.
הערות:

- התור צריך לשמור את המרצה/סטודנט בצורה כלשהי. קיבלתי מגוון דרכים לבצע את זה – מערך, שליחת פרמטר או כל דבר דומה. יש צורך בשמירת נתון הסבלנות, **זמן פקיעת הסבלנות** (t_e) וסוג הלקוח שהגיע לחניון.
- בנוגע לבדיקת 20 דקות לפני שעה עגולה: $if\ T_{now} - \lfloor T_{now} \rfloor \geq 40\ minutes$
- **התייחסות לנטישה**: מתבצעת באמצעות יצירת זמן סיום סבלנות. בעת הגעה לזמן זה – תופעל פרוצדורת ביצוע סיום המתנה.
- התייחסות לקדימות: בפרוצדורה זאת, ההתייחסות היא בשמירת סוג הלקוח, ניהול שני תורים כך שלמרצים תהיה קדימות בהמשך (פרוצדורת סיום חניה).

<u>ביצוע סיום חניה</u>: יש לבדוק ראשית אם קיים תור, כדי שנכניס מכונית חדשה לחניון. **כדי לקיים את הקדימות בתור - יש לבדוק קודם את תור המרצים. רק אם תור המרצים ריק – יש לבדוק את תור הסטודנטים.** אם קיים תור כלשהו – נשמור ללקוח את זמן הכניסה לחניה - t_{park}.

<u>ביצוע סיום סבלנות</u>: נבדוק אם הלקוח כבר נכנס לחניון – על ידי בדיקה אם מוגדר t_{park} ללקוח. במידה והלקוח נכנס כבר לחניון, אפשר לסיים את הפרוצדורה. במידה ו-t_{park} אינו מוגדר (או מוגדר עם ערך ספציפי לבחירתכם) יש צורך להקטין את התור הרלוונטי (סטודנטים / מרצים) בהתאם ולעדכן את מדד הנטישה המתאים. שימו לב שזה בדיוק מה שביצעתם בפרויקט.
הערות:

- לא ניתן להתייחס לנטישה רק בביצוע סיום החניה, משום שאם הלקוחות נטשו קודם, התור קטן. בבעיה הנתונה יש משמעות לאורך התור בכל רגע (משפיע על נטישה של סטודנטים). לכן חובה לבצע בקרה רציפה על סבלנות ההמתנה של הלקוחות.
- ניתן לחשוב על פתרון נוסף בו לא קיים אירוע "סיום הסבלנות". במקרה כזה, שמגיע לקוח לחניון, יש לבדוק אם יש 5 מכוניות בהתחשב בסבלנות המכוניות בתור, כלומר לבדוק עבור כל מכונית בתור אם היא היתה אמורה לנטוש כבר, או לא.

<u>שאר הפרוצדורות</u> – הדפסת פלט, אתחול, ראשי ופרוצדורות היצירה טריוויאליות. עבור פרוצדורות היצירה של סיום הסבלנות ושל סיום החניה יש לקבל כפרמטר את אובייקט הלקוח או זהות הלקוח (סטודנט / מרצה).

ב. תארי באופן מילולי את כל השינויים שאותם יש לבצע במודל הסימולציה אם נתון כי השער נתקע מדי פעם. התפלגות הזמן הבין מופעי של תקיעות השער הינה מעריכית עם ממוצע של 3 שעות וזמן תיקון המתפלג בקירוב נורמלית עם ממוצע של 5 דקות וסטיית תקן של דקה. (5 נק')

במקרה זה יש צורך להוסיף שתי פרוצדורות – ביצוע תקלה בשער, ביצוע תיקון תקלה:

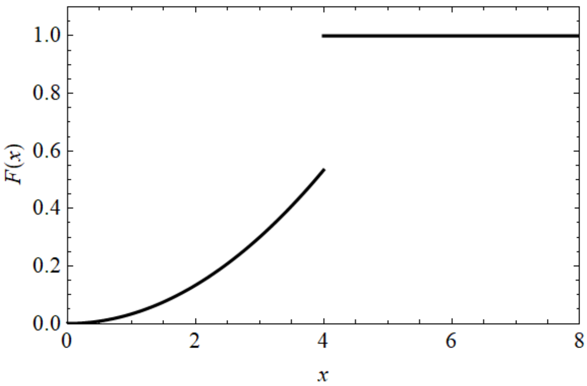
נתונים אודות התפלגות יצירת התקלה והתיקון נתונים בשאלה.
בנוסף, יש להתחשב בעובדה שאין יציאות וכניסות לחניון בזמן התקלה. אפשר ב-"ביצוע תקלה בשער" לעדכן את זמני האירועים ביומן האירועים (שאינם המתנה). עבור סיום החניה, זמן הסיום החדש יהיה המינימום בין זמן הסיום המקורי, וזמן סיום התקלה.

שאלה 2 (35 נק')

הערה: במידת הצורך, יש להניח רמת המובהקות 0.05 וגודל שגיאה מקסימאלית של 0.01.

א. השתמשי באלגוריתם LCG לדגימת שני מספרים אקראיים בתחום [0,1]. יש להשתמש בערכים הבאים $x_0 = 0, a = 4, b = 6, m = 7$ (10 נק')

ב. נתונה פונקציית התפלגות מצטברת הבאה (לנוחיותך, מצורף גם גרף הפונקציה) :



$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{30}; & 0 < x < 4 \\ 1\,; & x \geq 4 \end{cases}$$

השתמשי בשיטת הטרנספורם ההופכי ובתשובתך לסעיף א' לחישוב דגימת ערכי שני מספרים מההתפלגות הנ"ל (10 נק').

ג. נתונים המספרים הבאים: 1.2, 3.2, 2.4, 7.1, 0.6 יש לבחון את ההשערה כי המספרים נדגמו מההתפלגות הנ"ל (8 נק').

על פי פונקציית ההתפלגות המצטברת המתוארת, הערך המקסימאלי האפשרי שיכול להתקבל הינו 4. מכאן, שההסתברות לדגום את הערך 7.1 היא 0. המספרים בהכרח לא נדגמו מהתפלגות הנ"ל. (ניתן גם להראות שפונקציית הנראות תהיה אפס).

ד. נתון האלגוריתם לדגימת מספרים באופן הבא:

1) דיגמי מספר מההתפלגות $F_X(x)$ הנ"ל.
2) אם x<3 , החזירי את x.
3) אחרת, חיזרי ל1.

כמו-כן, נתונים המספרים הבאים: 2.2 , 1, 0.1, 2.8. בחני את ההשערה שהמספרים הגיעו מהאלגוריתם הנ"ל ע"י שימוש במבחן קולמוגורוב סמירנוף (7 נק').

ניתן להגדיר מ"מ חדש לפי המגלם את האלגוריתם באופן הבא: . ..

פתרון

א.

$$X_j = \left(a \cdot X_{j-1} + b\right) mod(m)$$

מהצבה פשוטה נקבל:

$$X_1 = (a \cdot X_0 + b) mod(m) = 6mod7 = 6$$
$$X_2 = (a \cdot X_2 + b) mod(m) = 30mod7 = 2$$

התבקשנו לחולל מספרים אקראיים בתחום [0,1] ולכן:

$$u_1 = \frac{6}{7} = 0.857$$
$$u_2 = \frac{2}{7} = 0.285$$

ב. קל לראות כי הפונקציה המצטברת הנתונה מחולקת לשני תחומים: תחום רציף ותחום בדיד. הסיכוי להיות בתחום הרציף הינו $\frac{8}{15}$, ובתחום הבדיד (כלומר, לקבל את הערך 4) $\frac{7}{15}$.

מכאן:

1. דגום מהתפלגות אחידה $\mathbf{u \sim U(0,1)}$
2. נבחר תחום מתאים בהתאם לדגימה:
   a. תחום רציף- $\mathbf{u} \le \frac{8}{15}$:
   $$\boldsymbol{x} = \sqrt{30l}$$
   b. תחום בדיד- $\mathbf{u} > \frac{8}{15}$:
   $$\boldsymbol{x} = 4$$
3. החזר $\mathbf{x}$

נשתמש בדגימות שקיבלנו בסעיף א', ונקבל:

$$u_1 \to x = 4$$
$$u_2 \to x = \sqrt{30u_2} = 2.92$$

ג. הערך המקסימלי שהתפלגות זו יכולה לייצר הינו 4, ולכן הסיכוי שהמספרים שנדגמו הגיעו מההתפלגות הנ"ל הינו 0 (לצורך האינטואיציה - הסיכוי לקבל 7.1 מההתפלגות הזו זהה לסיכוי לקבל ערך 7 בהטלת קובייה הוגנת).

ד. נשים לב כי האלגוריתם אמנם דוגם מההתפלגות הנתונה, אך זה מייצר רק ערכים קטנים מ-3. כלומר התפלגות האלגוריתם חסומה מלמעלה על ידי הערך 3. לכן יש לנרמל את ההתפלגות (בהסתברות לקבל ערך קטן מ-3):

$$\widehat{F_x}(x) = \frac{F_x(x)}{0.3} = \frac{x^2}{9}$$

$H_0: X \sim \widehat{F_x}(x)$
$H_1: else$

D_i^+	D_i^-	$\widehat{F_x}(x_{(i)})$	n_i
0.2489	0.0011	0.0011	0.1
0.3889	0.1389	0.1111	1
0.2123	0.0377	0.5377	2.2
0.1289	0.1211	0.8711	2.8

$$D_{st} = 0.3889$$
$$D_{4,0.95} = 0.62394$$

מכאן, לא נדחה את השערת האפס ונאמר שהנתונים הגיעו מהאלגוריתם הנ"ל ברמת מובהקות 0.05.

שאלה 3 (35 נק')

הערה: ניתן לפתור את סעיפים ב' וג' גם אם לא הצלחתם הסעיפים הקודמים.

ממוצע הציונים לאורך השנים בבחינה בסימולציה הוא 80. בעקבות החשש ממרצה מרושע, התחוללה בכיתה תופעה מוזרה - החל מ30 יום לפני מועד הבחינה בקורס, חלק מהסטודנטים החלו לחלות במחלת ה"לחצת". מחלה זו פוגעת ביכולתם של כל הנדבקים לתפקד באופן אופטימלי ביום הבחינה. בעקבות זאת, ציונם יורד ב20%.

40% מהסטודנטים, מגלים סימני חרדה ולחץ. 60% מהסטודנטים אינם חוששים מהבחינה, ובוודאות לא ילקו במחלה. עבור יתר האוכלוסייה, ניתן להידבק מהמחלה באופן אקראי בקצב קבוע של β, או ע"י מפגש עם סטודנט שנדבק כבר במחלת הלחצת ומראה סימני לחץ, וזאת בקצב של δ. כמו-כן, ידוע שסטודנט שנדבק במחלה לא יחלים עד תום תקופת הבחינות. למען הפשטות יש להניח אוכלוסייה גדולה ומנורמלת ל-1. למען הסר ספק, ההסתברות להידבק במחלה אינה תלויה בכישורי הסטודנט.

א. הגדירי מודל סימולציה דטרמיניסטי בזמן בדיד לתיאור הדינמיקה של "לחצת". יש להגדיר מצבים אפשריים (3 נק'), משוואות (10 נק') ותנאי התחלה של המודל (2 נק').

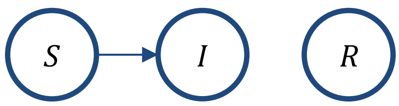
ב. מה צריך להיות מספר הריאליזציות הנדרש בסימולציה לאמידת פרופרצית הסטודנטים שמגלים סימני "לחצת" ביום הבחינה? יש להניח רמת ביטחון של 99.9% עם גודל שגיאה מקסימלי של 2%. (10 נק')

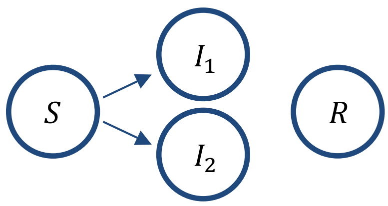
ג. הגדירי פסאדו-קוד קצר לאמידת ממוצע הציונים בבחינה. לצורך האמידה יש להשתמש ב1000 ריאליזציות של הסימולציה (10 נק').

פתרון

א. המצב S מייצג את אוכלוסיית הפגיעים (לא כלל האוכלוסייה) בדומה ל-SIR. המצב R מייצג את החסינים. שימו לב שאין "הבראה" בסיפור, כלומר גודל אוכלוסייה זו קבוע לכל תקופת הבעיה (עד מועד הבחינה) והינו 0.6. **הפרדת מצב זה <u>הכרחית</u> – הסטודנטים בוודאות לא ילקו במחלה.** התקבלו אף פתרונות שאין כלל מצב R, והאוכלוסייה בגודל 0.4.

לגבי אוכלוסיית המדביקים - ישנם 2 פתרונות שהתקבלו. מימין, מצב בו מפרידים בין סטודנטים מדבקים ל-לא מדבקים (מדבקים = I_2 - מראים סימני לחץ, לא מדבקים = I_1 - לא מראים סימני לחץ), ומשמאל – לא קיימת הפרדה (מחייב התאמה במשוואות).





מערכות משוואות – מודל ימין

רק מצב I_2 צריך להופיע במפגש

$$S(t+1) = S(t) - \delta \cdot I_2 \cdot S(t) - \beta \cdot S(t)$$
$$I_1(t+1) = I_1(t) + 0.5(\delta \cdot I_2 \cdot S(t) + \beta \cdot S(t))$$
$$I_2(t+1) = I_2(t) + 0.5(\delta \cdot I_2 \cdot S(t) + \beta \cdot S(t))$$
$$R(t+1) = R(t) = 0.6$$
$$S(t) + R(t) + I_1(t) + I_2(t) = 1\ \forall t$$

מערכת משוואות מודל שמאל

כעת רק חצי מהאוכלוסייה הנגועה גם מדביק

$$S(t+1) = S(t) - 0.5\delta \cdot I \cdot S(t) - \beta \cdot S(t)$$
$$I(t+1) = I(t) + 0.5\delta \cdot I \cdot S(t) + \beta \cdot S(t)$$
$$R(t+1) = R(t) = 0.6$$
$$S(t) + I(t) + R(t) = 1\ \forall t$$

תנאי התחלה בשני המודלים: $S(0) = 0.4\,, I_1(0) = I_2(0) = I(0) = 0,\ R(0) = 0.6$

ב. בשאלה נתבקשתם לספק n עבור אמידת פרופורציית הסטודנטים המגלים סימני לחצת, כלומר את פרופורציית I_2.
נתון $\epsilon = 0.02, \quad 1-\alpha = 0.9999$.
לפי הנוסחה שהופיעה בתרגול: $\epsilon = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$. נציב את הערכים המתאימים, ומפה קל לחלץ את n.
לגבי הפרופורציה שיש להציב בנוסחה. במקרה המחמיר, הפרופורציה היא לכל היותר 0.2, שכן רק 40% הם פוטנציאליים להדבקה ורק 50% יראו תסמינים.

ג. הממוצע הנתון בשאלה, 80, רלוונטי לכל מי שלא לקה במחלה, בעוד אלו שלקו (בין אם הראו סימני חרדה או לא) יהיו עם ממוצע נמוך ב-20%, כלומר 64. מכאן, כל מה שנשאר הוא לאמוד את פרופורציית הלוקים במחלה, כלומר הביטוי $I_1 + I_2$ (או I במודל השני) באמצעות פסאודו קוד המריץ את המודל ומחלץ פרופורציה זו (או משתמש ב-1,000 הרצות נתונות), שנסמנה p_I. אומד לממוצע הכיתתי: $80(1-p_I) + 64p_I$.